

SUPPLEMENTARY MATERIAL FOR “ESTIMATORS COMPARISON OF SEPARABLE COVARIANCE STRUCTURE WITH ONE COMPONENT AS COMPOUND SYMMETRY MATRIX”

KATARZYNA FILIPIAK*, DANIEL KLEIN†, AND MONIKA MOKRZYCKA‡

1. Estimators comparison. In this supplemental file we present the results of the comparison of statistical properties of the maximum likelihood estimators and entropy loss estimators of structured covariance matrix $\Psi_{CS} \otimes \Sigma$.

We perform simulation studies for the parameters (p, q) as $(3, 3)$, $(10, 3)$, $(15, 3)$, $(30, 3)$ and $(3, 5)$, $(10, 5)$, $(15, 5)$. Samples of size $n = 100$ are generated 1000 times from a pq -variate normal population $N_{pq}(0; \Psi_{CS} \otimes \mathbf{I}_q)$ with $\varrho = 0, 0.5, 0.9$.

Table S.1 contains the expectation and standard deviation (SD) of $\hat{\varrho}$ and $\tilde{\varrho}$.

Tables S.2 and S.4 contain the expectation of $\hat{\Sigma}$ and $\tilde{\Sigma}$ for $q = 3$ and $q = 5$, respectively. In Tables S.3 and S.5 the standard deviations of the estimators (computed separately for every element of the estimator of Σ) are presented respectively for $q = 3$ and $q = 5$.

TABLE S.1
Expectation and standard deviation of the MLE and ELE of ϱ

		$q = 3$				$q = 5$			
		MLE		ELE		MLE		ELE	
p	ϱ	$E(\hat{\varrho})$	$SD(\hat{\varrho})$	$E(\tilde{\varrho})$	$SD(\tilde{\varrho})$	$E(\hat{\varrho})$	$SD(\hat{\varrho})$	$E(\tilde{\varrho})$	$SD(\tilde{\varrho})$
3	0	0.0010	0.0331	0.0022	0.0342	-0.0004	0.0266	0.0004	0.0276
3	0.5	0.4999	0.0331	0.5010	0.0342	0.4989	0.0266	0.4996	0.0276
3	0.9	0.8997	0.0093	0.9000	0.0096	0.8995	0.0075	0.8997	0.0078
10	0	-0.0001	0.0085	0.0006	0.0103	0.0004	0.0066	0.0009	0.0095
10	0.5	0.4988	0.0235	0.5004	0.0282	0.5007	0.0181	0.5014	0.0257
10	0.9	0.8994	0.0079	0.8998	0.0094	0.9001	0.0060	0.9002	0.0085
15	0	-0.0002	0.0057	0.0004	0.0079	0.0003	0.0044	0.0014	0.0093
15	0.5	0.4985	0.0228	0.5000	0.0315	0.5006	0.0176	0.5030	0.0365
15	0.9	0.8992	0.0079	0.8995	0.0109	0.9001	0.0060	0.9004	0.0125
30	0	0.0000	0.0027	0.0022	0.0098	-	-	-	-
30	0.5	0.4989	0.0208	0.5074	0.0699	-	-	-	-
30	0.9	0.8994	0.0073	0.8999	0.0255	-	-	-	-

*Institute of Mathematics, Poznań University of Technology, Poland (katarzyna.filipiak@put.poznan.pl).

†Institute of Mathematics, Faculty of Science, P. J. Šafárik University, Košice, Slovakia (daniel.klein@upjs.sk).

‡Institute of Plant Genetics, Polish Academy of Sciences, Poznań, Poland (mmok@igr.poznan.pl).

TABLE S.2
Expectation of the MLE and ELE of Σ for $q = 3$

p	ϱ	$E(\widehat{\Sigma})$			$E(\widetilde{\Sigma})$		
3	0	0.991	-0.001	0.000	0.907	-0.002	-0.001
		-0.001	0.992	-0.001	-0.002	0.907	0.000
		0.000	-0.001	0.988	-0.001	0.000	0.904
3	0.5	0.992	-0.001	0.000	0.909	-0.002	-0.001
		-0.001	0.993	-0.001	-0.002	0.909	0.000
		0.000	-0.001	0.989	-0.001	0.000	0.906
3	0.9	0.993	-0.001	0.000	0.910	-0.002	-0.001
		-0.001	0.994	-0.001	-0.002	0.910	0.000
		0.000	-0.001	0.990	-0.001	0.000	0.907
10	0	0.990	0.000	0.001	0.686	0.000	0.001
		0.000	0.992	0.000	0.000	0.686	0.000
		0.001	0.000	0.990	0.001	0.000	0.686
10	0.5	0.990	0.000	0.001	0.688	0.000	0.001
		0.000	0.991	0.000	0.000	0.688	0.000
		0.001	0.000	0.990	0.001	0.000	0.688
10	0.9	0.989	0.000	0.001	0.689	0.000	0.001
		0.000	0.991	0.000	0.000	0.690	0.000
		0.001	0.000	0.989	0.001	0.000	0.689
15	0	0.991	0.000	0.001	0.535	0.000	0.001
		0.000	0.990	0.000	0.000	0.534	0.000
		0.001	0.000	0.990	0.001	0.000	0.534
15	0.5	0.990	0.000	0.001	0.537	0.000	0.001
		0.000	0.989	0.000	0.000	0.536	0.000
		0.001	0.000	0.989	0.001	0.000	0.535
15	0.9	0.989	0.000	0.001	0.538	0.000	0.001
		0.000	0.988	0.000	0.000	0.537	0.000
		0.001	0.000	0.988	0.001	0.000	0.537
30	0	0.990	0.000	0.000	0.084	0.000	0.000
		0.000	0.990	0.000	0.000	0.084	0.000
		0.000	0.000	0.991	0.000	0.000	0.084
30	0.5	0.989	0.000	0.000	0.086	0.000	0.000
		0.000	0.989	0.000	0.000	0.086	0.000
		0.000	0.000	0.990	0.000	0.000	0.087
30	0.9	0.989	0.000	0.000	0.088	0.000	0.000
		0.000	0.988	0.000	0.000	0.088	0.000
		0.000	0.000	0.990	0.000	0.000	0.089

TABLE S.3
Standard deviation of the MLE and ELE of Σ for $q = 3$

p	ϱ	SD($\widehat{\Sigma}$)			SD($\widetilde{\Sigma}$)		
3	0	0.083	0.057	0.057	0.081	0.055	0.054
		0.057	0.081	0.057	0.055	0.078	0.054
		0.057	0.057	0.078	0.054	0.054	0.076
3	0.5	0.090	0.057	0.057	0.087	0.055	0.055
		0.057	0.088	0.057	0.055	0.084	0.055
		0.057	0.057	0.084	0.055	0.055	0.082
3	0.9	0.103	0.057	0.057	0.099	0.055	0.055
		0.057	0.101	0.057	0.055	0.095	0.055
		0.057	0.057	0.097	0.055	0.055	0.094
10	0	0.044	0.032	0.032	0.040	0.026	0.026
		0.032	0.044	0.031	0.026	0.039	0.025
		0.032	0.031	0.043	0.026	0.025	0.039
10	0.5	0.057	0.032	0.032	0.050	0.026	0.026
		0.032	0.057	0.031	0.026	0.050	0.025
		0.032	0.031	0.058	0.026	0.025	0.051
10	0.9	0.080	0.032	0.032	0.069	0.027	0.026
		0.032	0.079	0.031	0.027	0.069	0.026
		0.032	0.031	0.082	0.026	0.026	0.070
15	0	0.035	0.025	0.027	0.030	0.018	0.019
		0.025	0.036	0.025	0.018	0.031	0.019
		0.027	0.025	0.035	0.019	0.019	0.031
15	0.5	0.052	0.025	0.027	0.041	0.019	0.019
		0.025	0.053	0.025	0.019	0.043	0.019
		0.027	0.025	0.054	0.019	0.019	0.042
15	0.9	0.078	0.025	0.027	0.060	0.019	0.019
		0.025	0.080	0.025	0.019	0.062	0.019
		0.027	0.025	0.080	0.019	0.019	0.061
30	0	0.025	0.018	0.018	0.015	0.005	0.005
		0.018	0.025	0.018	0.005	0.015	0.005
		0.018	0.018	0.025	0.005	0.005	0.015
30	0.5	0.047	0.018	0.018	0.018	0.006	0.005
		0.018	0.046	0.018	0.006	0.019	0.005
		0.018	0.018	0.047	0.005	0.005	0.019
30	0.9	0.075	0.018	0.018	0.025	0.006	0.006
		0.018	0.074	0.018	0.006	0.026	0.006
		0.018	0.018	0.075	0.006	0.006	0.026

TABLE S.4
 Expectation of the MLE and ELE of Σ for $q = 5$

p	ϱ	$E(\widehat{\Sigma})$					$E(\widetilde{\Sigma})$				
3	0	0.993	-0.001	0.002	0.000	0.001	0.854	-0.001	0.002	0.000	0.001
		-0.001	0.991	-0.002	0.002	0.003	-0.001	0.853	-0.002	0.000	0.001
		0.002	-0.002	0.990	0.000	0.001	0.002	-0.002	0.851	0.000	0.000
		0.000	0.002	0.000	0.986	0.001	0.000	0.000	0.000	0.850	0.001
		0.001	0.003	0.001	0.001	0.993	0.001	0.001	0.000	0.001	0.856
3	0.5	0.993	-0.001	0.002	0.000	0.001	0.854	-0.001	0.002	0.000	0.001
		-0.001	0.990	-0.001	0.002	0.003	-0.001	0.853	-0.002	0.000	0.001
		0.002	-0.001	0.990	0.000	0.001	0.002	-0.002	0.852	0.000	0.000
		0.000	0.002	0.000	0.986	0.001	0.000	0.000	0.000	0.851	0.001
		0.001	0.003	0.001	0.001	0.993	0.001	0.001	0.000	0.001	0.856
3	0.9	0.992	-0.001	0.002	0.000	0.001	0.854	-0.001	0.002	0.000	0.001
		-0.001	0.990	-0.001	0.002	0.003	-0.001	0.853	-0.002	0.000	0.001
		0.002	-0.001	0.990	0.000	0.001	0.002	-0.002	0.852	0.000	0.000
		0.000	0.002	0.000	0.986	0.001	0.000	0.000	0.000	0.851	0.001
		0.001	0.003	0.001	0.001	0.992	0.001	0.001	0.000	0.001	0.856
10	0	0.991	-0.001	0.000	-0.001	0.001	0.486	-0.001	0.000	0.001	0.000
		-0.001	0.990	0.001	0.000	0.001	-0.001	0.487	0.001	0.000	0.000
		0.000	0.001	0.991	0.000	0.001	0.000	0.001	0.485	0.000	0.001
		-0.001	0.000	0.000	0.988	0.002	0.001	0.000	0.000	0.487	0.002
		0.001	0.001	0.001	0.002	0.990	0.000	0.000	0.001	0.002	0.488
10	0.5	0.993	-0.001	0.000	-0.001	0.001	0.488	-0.001	0.000	0.001	0.000
		-0.001	0.992	0.001	-0.001	0.001	-0.001	0.489	0.000	0.000	0.000
		0.000	0.001	0.993	0.000	0.001	0.000	0.000	0.487	0.000	0.001
		-0.001	-0.001	0.000	0.990	0.002	0.001	0.000	0.000	0.489	0.002
		0.001	0.001	0.001	0.002	0.992	0.000	0.000	0.001	0.002	0.490
10	0.9	0.995	-0.001	0.000	-0.001	0.001	0.490	-0.001	0.000	0.001	0.000
		-0.001	0.993	0.001	-0.001	0.001	-0.001	0.491	0.000	0.000	0.000
		0.000	0.001	0.994	0.000	0.001	0.000	0.000	0.489	0.000	0.001
		-0.001	-0.001	0.000	0.992	0.002	0.001	0.000	0.000	0.490	0.002
		0.001	0.001	0.001	0.002	0.994	0.000	0.000	0.001	0.002	0.491
15	0	0.990	0.000	0.000	0.000	0.002	0.235	0.000	0.000	0.000	0.000
		0.000	0.990	0.000	0.000	0.001	0.000	0.236	0.000	-0.001	0.000
		0.000	0.000	0.991	0.000	0.000	0.000	0.000	0.235	0.000	0.000
		0.000	0.000	0.000	0.989	0.002	0.000	-0.001	0.000	0.236	0.001
		0.002	0.001	0.000	0.002	0.991	0.000	0.000	0.000	0.001	0.236
15	0.5	0.992	0.000	0.000	0.000	0.002	0.237	0.000	0.000	0.000	0.000
		0.000	0.992	0.000	0.000	0.001	0.000	0.238	0.000	0.000	0.000
		0.000	0.000	0.993	0.000	0.000	0.000	0.000	0.237	0.000	0.000
		0.000	0.000	0.000	0.991	0.002	0.000	0.000	0.000	0.238	0.001
		0.002	0.001	0.000	0.002	0.993	0.000	0.000	0.000	0.001	0.238
15	0.9	0.994	0.000	0.000	0.000	0.002	0.239	0.000	0.000	0.000	0.000
		0.000	0.994	0.000	0.000	0.001	0.000	0.240	-0.001	0.000	0.000
		0.000	0.000	0.995	0.000	0.000	0.000	-0.001	0.238	0.000	0.000
		0.000	0.000	0.000	0.993	0.002	0.000	0.000	0.000	0.240	0.001
		0.002	0.001	0.000	0.002	0.994	0.000	0.000	0.000	0.001	0.240

TABLE S.5
Standard deviation of the MLE and ELE of Σ for $q = 5$

p	ϱ	SD($\hat{\Sigma}$)					SD($\tilde{\Sigma}$)				
3	0	0.083	0.057	0.056	0.056	0.059	0.077	0.053	0.053	0.052	0.054
		0.057	0.078	0.058	0.057	0.058	0.053	0.073	0.054	0.053	0.054
		0.056	0.058	0.079	0.059	0.059	0.053	0.054	0.076	0.055	0.055
		0.056	0.057	0.059	0.084	0.059	0.052	0.053	0.055	0.078	0.055
		0.059	0.058	0.059	0.059	0.084	0.054	0.054	0.055	0.055	0.080
3	0.5	0.087	0.057	0.056	0.056	0.059	0.080	0.053	0.053	0.052	0.054
		0.057	0.082	0.058	0.057	0.058	0.053	0.076	0.054	0.053	0.054
		0.056	0.058	0.085	0.058	0.059	0.053	0.054	0.081	0.055	0.055
		0.056	0.057	0.058	0.090	0.059	0.052	0.053	0.055	0.083	0.055
		0.059	0.058	0.059	0.059	0.089	0.054	0.054	0.055	0.055	0.084
3	0.9	0.095	0.057	0.057	0.056	0.059	0.086	0.053	0.053	0.052	0.054
		0.057	0.090	0.058	0.057	0.058	0.053	0.084	0.054	0.053	0.054
		0.057	0.058	0.095	0.058	0.058	0.053	0.054	0.089	0.055	0.055
		0.056	0.057	0.058	0.100	0.059	0.052	0.053	0.055	0.092	0.056
		0.059	0.058	0.058	0.059	0.098	0.054	0.054	0.055	0.056	0.092
10	0	0.045	0.031	0.031	0.030	0.031	0.034	0.021	0.022	0.021	0.022
		0.031	0.044	0.031	0.030	0.031	0.021	0.034	0.022	0.021	0.022
		0.031	0.031	0.046	0.031	0.031	0.022	0.022	0.034	0.022	0.022
		0.030	0.030	0.031	0.044	0.030	0.021	0.021	0.022	0.034	0.022
		0.031	0.031	0.031	0.030	0.045	0.022	0.022	0.022	0.022	0.034
10	0.5	0.054	0.031	0.031	0.030	0.031	0.040	0.022	0.022	0.022	0.022
		0.031	0.053	0.031	0.030	0.031	0.022	0.040	0.022	0.022	0.022
		0.031	0.031	0.055	0.031	0.031	0.022	0.022	0.040	0.022	0.022
		0.030	0.030	0.031	0.054	0.030	0.022	0.022	0.022	0.040	0.022
		0.031	0.031	0.031	0.030	0.053	0.022	0.022	0.022	0.022	0.040
10	0.9	0.070	0.031	0.032	0.030	0.031	0.051	0.022	0.022	0.022	0.022
		0.031	0.069	0.031	0.031	0.031	0.022	0.051	0.022	0.022	0.023
		0.032	0.031	0.070	0.031	0.031	0.022	0.022	0.050	0.022	0.023
		0.030	0.031	0.031	0.070	0.030	0.022	0.022	0.022	0.051	0.022
		0.031	0.031	0.031	0.030	0.069	0.022	0.023	0.023	0.022	0.051
15	0	0.036	0.026	0.026	0.026	0.025	0.023	0.013	0.013	0.013	0.013
		0.026	0.037	0.026	0.025	0.025	0.013	0.022	0.013	0.013	0.012
		0.026	0.026	0.038	0.026	0.026	0.013	0.013	0.023	0.012	0.012
		0.026	0.025	0.026	0.036	0.025	0.013	0.013	0.012	0.023	0.013
		0.025	0.025	0.026	0.025	0.036	0.013	0.012	0.012	0.013	0.022
15	0.5	0.047	0.026	0.026	0.026	0.025	0.027	0.013	0.013	0.013	0.013
		0.026	0.049	0.026	0.025	0.025	0.013	0.027	0.013	0.013	0.012
		0.026	0.026	0.048	0.026	0.026	0.013	0.013	0.027	0.012	0.013
		0.026	0.025	0.026	0.046	0.026	0.013	0.013	0.012	0.028	0.013
		0.025	0.025	0.026	0.026	0.047	0.013	0.012	0.013	0.013	0.026
15	0.9	0.065	0.026	0.026	0.026	0.025	0.035	0.013	0.013	0.013	0.013
		0.026	0.068	0.027	0.025	0.025	0.013	0.035	0.013	0.013	0.013
		0.026	0.027	0.066	0.026	0.026	0.013	0.013	0.035	0.012	0.013
		0.026	0.025	0.026	0.064	0.026	0.013	0.013	0.012	0.036	0.013
		0.025	0.025	0.026	0.026	0.066	0.013	0.013	0.013	0.013	0.035